**EXAMEN SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS II Madrid junio 2023**



Este documento está redactado de forma muy escueta, ya que su objetivo es seguirlo a la vez que se ve el vídeo grabado por Andrés Cebrián en su canal MATESCONANDRES. Accede a cada pregunta en vídeo mediante el QR correspondiente.

## PARTE A

1. **A.1: 2.5 puntos**

   En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: $A$, $B$ y $C$. Los camiones de tipo $A$ tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo $B$, de 24 toneladas y los de tipo $C$, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo $A$ para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo $B$ supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

   Accede a este ejercicio resuelto en vídeo por MATES CON ANDRES

   **Resolución**

   Sea $x$ el número de camiones de tipo $A$, $y$ el número de camiones de tipo $B$ y $z$ el número de camiones de tipo $C$.

   Entonces, traducimos el enunciado a ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 14x+24y+28z=302 \\ x+1=y+z \\ 0,1\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} 7x+17y+14z & =151 \\ x-y-z & =-1 \\ 3y-5z & =0 \end{array}\right\},$$

   donde, para la última ecuación:

$$0.1\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z \;\Rightarrow\; 2.4y-4z=0 \;\Rightarrow\; 24y-40z=0 \;\Rightarrow\; 3y-5z=0,$$

   donde en el último paso, hemos multiplicado toda la ecuación por $\frac{1}{8}$.

   Entonces, resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 12 & 14 & 151 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)_{7f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 12 & 14 & 151 \\ 0 & -19 & -21 & -158 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)_{19f_3+3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 12 & 14 & 151 \\ 0 & -19 & -21 & -158 \\ 0 & 0 & -158 & -474 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} 7x+17y+14z &= 151 \\ 19y+21z &= 158 \\ -158z &= -474 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7,\ y=5,\ z=3.$$

Así, las toneladas transportadas por los camiones de tipo $A$ son $14 \cdot 7 = 98$, las toneladas transportadas por los camiones de tipo $B$ son $24 \cdot 5 = 120$, y las toneladas transportadas por los camiones de tipo $C$ son $28 \cdot 3 = 84$.



2. **A.2: 2.5 puntos**

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par *o* impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos *y* absolutos.



**Resolución**

a) $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x) \ \Rightarrow\ f$ es par.

Como $-f(x) = -\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \neq f(-x) \ \Rightarrow\ f$ no es impar.

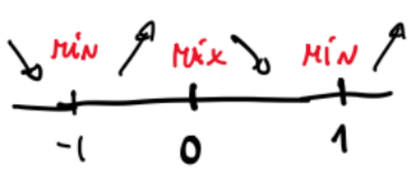
b) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \left(x^2-1\right)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$
$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$
$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

c) $f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = 0 \ \Rightarrow\ x = 0.$

Además, en la recta real incluimos los valores donde se anula el denominador de la derivada, que son $-1$ y $1$.



$$f'(-2) = \frac{-}{+} < 0$$
$$f'(-0.5) = \frac{-}{-} > 0$$
$$f'(0.5) = \frac{+}{-} < 0$$
$$f'(2) = \frac{+}{+} > 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty$$

$f(x)$ no tiene máximos absolutos.

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$

$f(x)$ tiene mínimos relativos y mínimos absolutos en $x = -1$ y $x = 1$



3. **A.3: 2.5 puntos**

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo $T$ y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos $A$ y $B$ con el plano $z = 1$.

c) ( 0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo $T$.



**Resolución**

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4,-4)$.

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2,-1,1)$.

Como los vectores anteriores no son proporcionales, los puntos no están alineados, y por tanto, forman un triángulo.

$$\pi : \begin{cases} C = (2,1,0) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,4,-4) \\ \overrightarrow{BC} = (2,-1,1) \end{cases} \qquad \pi : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-2 \\ 4 & -1 & y-1 \\ -4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Rightarrow \; z + \cancel{4x} - \cancel{8} - 8y + \cancel{8} - \cancel{4x} + 8 + y - 1 - 8z = -7y - 7z + 7 = 0 \; \Rightarrow \; y + z - 1 = 0.$$

b) $r: \begin{cases} A=(1,-2,3) \\ \vec{d_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-2+4\lambda \\ z=3-4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Para el punto de corte con el plano $z=1$, poniendo esto en la tercera ecuación paramétrica de $r$, se tiene:

$3-4\lambda=1 \;\Rightarrow\; -4\lambda=-2 \;\Rightarrow\; \lambda=1/2.$

Entonces:

$x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $y=-2+4\cdot\frac{1}{2}=0$, luego el punto de corte es $(\frac{1}{2},0,1)$.

c) $P=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CA}|$.

$\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4) \quad \overrightarrow{BC}=(2,-1,1) \quad \overrightarrow{CA}=A-C=(-1,-3,3).$

$P=\sqrt{1+16+16}+\sqrt{4+1+1}+\sqrt{1+9+9}=\sqrt{33}+\sqrt{6}+\sqrt{19}$ ul



4. **A.4: 2.5 puntos**

Se tiene un suceso $A$ de probabilidad $P(A)=0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso $B$ de probabilidad $P(B)=0.5$ es independiente de $A$. Calcule $P(A\cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso $C$ cumple $P(C\mid A)=0.5$. Determine $P(A\cap\bar{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso $D$ tal que $P(\bar{A}\mid D)=0.2$ y $P(D\mid A)=0.5$, calcule $P(D)$.



**Resolución**

a) $P(B)=0.5$, $A$ y $B$ independientes.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.3+0.5-0.3\cdot 0.5=0.65.$

b) $P(C\mid A)=0.5.$

$P(A\cap\bar{C})=P(A)-P(A\cap C)=0.3-0.15=0.15$

$P(C\mid A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(C\cap A)}{0.3}=0.5\Rightarrow P(C\cap A)=0.15.$

c) $P(\bar{A}\mid D)=0.2 \quad P(D\mid A)=0.5 \quad P(D)=\;? \quad P(A)=0.3$

$P(\bar{A}\mid D)=\frac{P(\bar{A}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D)-P(A\cap D)}{P(D)}$

$P(D\mid A)=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap D)}{0.3}=0.5 \;\Rightarrow\; P(A\cap D)=0.15.$

$P(\bar{A} \mid D) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(D)-0.15}{P(D)} = 0.2 \Rightarrow P(D) - 0.15 = 0.2P(D) \Rightarrow 0.8P(D) = 0.15 \Rightarrow P(D) = \frac{0.15}{0.8} = 0.1875.$



## PARTE B

1. **B.1: 2.5 puntos**

Dado el sistema $\left\{\begin{array}{llll} (a+1)x+ & 4y & & = 0 \\ & (a-1)y & +z & = 3 \\ 4x & +2ay & +z & = 3 \end{array}\right.$, se pide:



a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro $a$.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

**Resolución**

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = a^2 - 1 + 16 - 2a(a+1) = a^2 - 1 + 16 - 2a^2 - 2a = -a^2 - 2a + 15 = 0$

$$a = \frac{2 + \sqrt{4+60}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{-2} \Rightarrow a = -5 \text{ y } a = 3.$$

Si $a \neq -5$ y $a \neq 3 \Rightarrow$ SCD

- Si $a = -5 \Rightarrow \text{rg}\, A < 3$

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

rg $A = 2$, y como: $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 72 + 48 - 120 = 0$, entonces rg $A' = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = 3 \Rightarrow \text{rg}\, A = 3$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

rg $A = 2$, y como: $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 48 - 72 = 0$, entonces rg $A' = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Así:

- Si $a \neq -5$ y $a \neq 3 \Rightarrow$ SCD.
- Si $a = -5$ o $a = 3 \Rightarrow$ SCI.

b) $a = 3 \Rightarrow$ SCI.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{f}{4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{array} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) $a = 3 \Rightarrow$ SCD.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3f_3-2f_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3/10]{f1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

De lo anterior: $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$.



2. **B.2: 2.5 puntos**

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

a) ( 0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente limite: $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.



**Resolución**

Se tiene que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Continuidad en $x = -1$.

$f(-1) = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$f$ es continua en $x = -1$, y por lo tanto, lo es en su dominio.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2\cdot 1} = 1^{\infty}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{x^2}{2+x^2} - 1\right) \cdot \left(2x^2 - 1\right) = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2-x^2}{2+x^2} \cdot \left(2x^2-1\right)}$$

$$= e^{\log_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+2}{2+x^2}} = e^{-4}.$$

c)

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3-3x}dx = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3-3x}\right) dx = \frac{-2}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\ln|1-x|\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\ln 2\right) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 2 = \frac{-1+2\ln 2}{3}.$$



3. **B.3: 2.5 puntos**

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto$A(1, 1, 1)$, se pide:

a) ( 0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de $r$ y $\pi$ y calcular su intersección, si existe.

b) ( 0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto $A$ sobre el plano $\pi$.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto $A$ con respecto a la recta $r$.

**Resolución**

a) $\vec{d_r} = (2, 1, -2)$, $\vec{n_\pi} = (1, 0, -1)$.

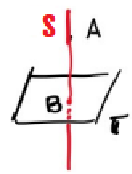
$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 2 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow r$ y $\pi$ son secantes.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

$1 + 2\lambda + 1 + 2\lambda = 2 \ \Rightarrow \ 2\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 0$

Así, el punto $P$ intersección de $r$ y $\pi$ es: $P = (1, 0, -1)$.

b)

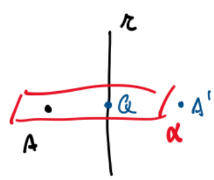



$$s : \begin{cases} A = (1, 1, 1) \\ \vec{d_s} = \vec{n_\pi} = (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

$1 + \lambda - 1 + \lambda = 2 \ \Rightarrow \ 2\lambda = 2 \ \Rightarrow \ \lambda = 1$

Así: $x = 1 + 1 = 2$, $y = 1$, $z = 1 - 1 = 0$, luego la proyección ortogonal es $(2, 1, 0)$.

c)




$\alpha$ es el plano perpendicular a $r$ pasando por $A$, luego:

$$\alpha : \begin{cases} A = (1, 1, 1) \\ \vec{n_\alpha} = \vec{d_r} = (2, 1, -2) \end{cases}$$

Se tiene que $\alpha : 2x + y - 2z + D = 0$ y como $A \in \alpha$ entonces: $2 + 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1$.

Así, $\alpha : 2x + y - 2z - 1 = 0$.

Para calcular el punto $Q$, que es el punto de corte de $r$ con el plano $\alpha$, sustituimos las expresiones de $x$, $y$ y $z$ de las ecuaciones parámetricas de $r$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

en la ecuación implícita de $\alpha$:

$2(1+2\lambda)+\lambda-2\cdot(-1-2\lambda)-1=0 \Rightarrow 2+4\lambda+\lambda+2+4\lambda-1=0 \Rightarrow 9\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{3}$.

Entonces, sustituyendo $\lambda=\frac{-1}{3}$ en las ecuaciones paramétricas de $r$, obtenemos el punto $Q$, que es $Q=(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$.

Ahora, el punto $Q$ es el punto medio de $A$ y su simétrico $A$‘ respecto de la recta $r$, luego:

$$Q=\frac{A+A'}{2} \Rightarrow A'=2Q-A=(2/3,-2/3,-2/3)-(1,1,1)=(-1/3,-5/3,-5/3).$$



4. **B.4: 2.5 puntos**

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.



a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardina solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) ( 0.5 puntos) Hallar una longitud $t<175$ mm tal que entre $t$ y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

**Resolución**

$X$: Longitud sardina(mm) $\longrightarrow$ N$(175, 25.75)$ $\qquad Z=\dfrac{X-175}{25.75}\longrightarrow$ N$(0,1)$.

a) $P(X>160)=P\left(Z>\dfrac{160-175}{25.75}\right)=P(Z>-0,58)=P(Z<0,58)=0.719.$

b)

$P(t \leq X \leq 175) = 0.18 \Rightarrow P(X \leq 175) - P(X \leq t) = 0.18 \Rightarrow 0.5 - P(X \leq t) = 0.18 \Rightarrow P(X \leq t) = 0.32 \Rightarrow P(X \geq t) = 0.68.$

Así:

$P\left(Z \geq \frac{t-175}{25.75}\right) = 0.68 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{175-t}{25.75}\right) = 0.68 \Rightarrow \frac{175-t}{25.75} = 0.47.$

De lo anterior: $t = 162.9$ mm.

c) $Y$: Número de sardinas devueltas $\longrightarrow$ B$(10, p)$.

$p = P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150-175}{25.75}\right) = P(Z < -0.97) = P(Z > 0,97) = 1 - P(Z \leq 0.97) = 1 - 0.834 = 0.166.$

Así, $Y \longrightarrow$ B$(10, 0.166)$. Entonces:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.166^0 \cdot (1 - 0.166)^{10} = 0.8372.$$