Trigonometría

1. Repaso sobre ángulos

Un ángulo es la porción del plano que existe entre dos semirrectas con origen común. Dado que dos semirrectas con origen común dividen al plano en dos partes, tendremos que indicar cuál de esas partes corresponde al ángulo.

En un ángulo, el vértice es el origen de las dos semirrectas que lo forman, y los lados son esas semirrectas.

Para medir un ángulo, dibujamos una circunferencia cuyo centro es el vértice de dicho ángulo. Entonces, partiendo de un lado, dividimos la circunferencia en 360 partes iguales, y contamos cuántas de estas quedan en el arco correspondiente a nuestro ángulo. Entonces diremos que el ángulo mide tantos grados como el número de partes anterior. Para representar un ángulo en grados añadiremos $\circ$.

Para indicar que parte del plano consideramos al dibujar un ángulo, incluiremos un arco correspondiente a nuestro ángulo.

Tenemos tres ángulos muy importantes:

1. Los ángulos que miden $90°$. Estos se denominan ángulos rectos.
2. Los ángulos que miden $180°$. Estos se denominan śngulos llanos.
3. Los ángulos que miden $0°$. En este caso, los dos lados del ángulo coinciden llamaremos a estos ángulos nulos.

Como sabes, para medir un ángulo podemos utilizar un transportador.

A partir de los ángulos de $0°$, $90°$ y $180°$, podemos clasificar todos los ángulos entre $0°$ y $180°$.

Así, diremos que un ángulo es agudo si mide entre $0°$ y $90°$, y un ángulo es obtuso si mide entre $90°$ y $180°$.

Normalmente nombraremos a los ángulos utilizando letras griegas: α, β, γ, ... Las letras que hemos indicado son las tres primeras letras del alfabeto griego, que se corresponden con las primeras letras de nuestro alfabeto: a, b, c.

2. Radianes

Un ángulo mide 1 radián si al considerar una circunferencia de centro el vértice del ángulo, entonces el arco correspondiente al ángulo mide lo mismo que el radio.

Siguiendo el mismo procedimiento, un ángulo mide tantos radianes como el número de veces que está incluido el radio en el arco correspondiente a dicho ángulo.

Se tiene que π radianes equivalen a $180°$.

Las magnitudes “Números de radianes” y “Números de grados sexagesimales” son directamente proporcionales, luego para pasar de una unidad de medida a la otra podemos plantear una regla de tres simple.

3. Un repaso sobre triángulos

Repasamos dos resultados fundamentales sobre triángulos:

1. La suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, o si trabajamos en radianes, π radianes.
2. El teorema de Pitágoras, valido para triángulos rectángulos, que afirma que en estos, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

4. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Supongamos que $\measuredangle$ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Si identificamos los lados con sus longitudes, entonces se definen el seno, coseno, tangente, y sus razones inversas respectivas cosecante, secante y contangente de $\measuredangle$, como:

$$\begin{aligned}
\text{sen}\measuredangle &= \frac{\text{Cateto opuesto de } \measuredangle}{\text{hipotenusa}} & \text{cosec}\,\measuredangle &= \frac{1}{\text{sen}\measuredangle} \\
\cos\measuredangle &= \frac{\text{Cateto contiguo de } \measuredangle}{\text{hipotenusa}} & \sec\measuredangle &= \frac{1}{\cos\measuredangle} \\
\tan\measuredangle &= \frac{\text{Cateto opuesto de } \measuredangle}{\text{Cateto contiguo de } \measuredangle} & \text{cotan}\,\measuredangle &= \frac{1}{\tan\measuredangle}
\end{aligned}$$

Además de la expresión que hemos presentado para la tangente, también se cumple que $\tan \measuredangle = \dfrac{\operatorname{sen}\measuredangle}{\cos \measuredangle}$, y de ello se sigue que la contangente, que es la inversa de la tangente, sería $\operatorname{cotan} \measuredangle = \dfrac{\cos \measuredangle}{\operatorname{sen}\measuredangle}$.

Dado que en un triángulo rectángulo la hipotenusa es su lado más largo, y que para el seno y el coseno dividimos la longitud de los catetos por la longitud de la hipotenusa, para estas razones trigonométricas obtenemos una fracción positiva cuyo denominador es mayor que el numerador, luego el seno y el coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo siempre es menor que 1.

5. Razones trigonométricas de ángulos agudos

Para obtener las razones trigonométricas de un ángulo agudo, simplemente tenemos que incluir este en un triángulo rectángulo.

Para ello, trazamos el segmento perpendicular a uno de los lados del ángulo hasta el otro ángulo. Entonces las razones trigonométricas de nuestro ángulo coinciden con las razones trigonométricas de este como ángulo de triángulo rectángulo construido.

6. Razones trigonométricas de ángulos notables

Deducimos las razones trigonométricas de los ángulos agudos notables, que son $30°$, $45°$ y $60°$.

Para obtener las razones trigonométricas de $45°$, consideramos un cuadrado de lado 1, y al partir este por una de sus diagonales, obtenemos un triángulo isósceles cuyos ángulos agudos son ambos $45°$.

Para obtener las razones trigonométricas de $30°$ y $60°$, consideramos un triángulo equilatero de lado 1, y al partir este por una de sus alturas, obtenemos dos triángulos rectángulo cuyos ángulos agudos son de $30°$ y $60°$.

De lo anterior se obtiene el siguiente cuadro:

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

7. Algunas fórmulas fundamentales de la trigonometría

Consideremos un ángulo agudo α.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras, se obtiene la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dividiendo en los dos miembros de la igualdad por $\operatorname{sen}^2 \alpha$ y por $\cos^2 \alpha$, se obtienen dos importantes fórmulas más:

- $1 + \operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$.

Aunque aquí razonamos para ángulos agudos, estas fórmulas son ciertas en general para ángulos cualesquiera, una vez introduzcamos las razones trigonométricas de estos.

8. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en obtener el valor de ciertos datos de este, ángulos y longitudes de lados, a partir del conocimiento de otros datos. Para ello, a partir del ángulo, la longitud del lado conocido y del lado incógnita, resolveremos la ecuación resultante de la expresión del la razón trigonométrica del ángulo donde aparecen los lados involucrados.

9. Problemas sobre triángulos rectángulos

Los problemas sobre triángulos rectángulos son aquellos que para su resolución debemos obtener valores desconocidos de triángulos rectángulos a partir de los datos dados.

10. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Para la obtención de las razones trigonométricas de un ángulo α cualquiera (puede ser mayor que $360°$), dibujaremos este ángulo de forma que el lado inicial sea horizontal y nazca hacia la derecha, dibujaremos entonces un ejes coordenados con origen el vértice del ángulo y una circunferencia de centro dicho vértice y radio 1. Entonces el otro lado del ángulo cortará a la circunferencia en un punto de coordenadas (x, y).

Entonces se define $\operatorname{sen}\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, y el resto de razones trigonométricas en función de estas con las mismas expresiones que hemos presentado anteriormente.

Al considerar un ángulo agudo, se puede ver fácilmente que las razones trigonométricas obtenidas por este procedimiento y las que introducíamos anteriormente usando triángulos rectángulos, coinciden.

11. Razones trigonométricas de más ángulos notables

Además de las razones trigonométricas de los ángulos agudos notables $30°$, $45°$ y $60°$, también se pueden obtener fácilmente las razones trigonométricas de más ángulos notables, ahora de $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ y $360°$. Recopilamos estas en el siguiente cuadro:

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	No existe
$180°$	0	-1	0
$270°$	-1	0	No existe
$360°$	0	1	0

12. Signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes

A partir de la definición de las razones trigonométricas, se pueden deducir fácilmente cuáles son los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes. Así se tiene:

Cuadrante	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
1$^{\text{er}}$ Cuadrante	$+$	$+$	$+$
2$^{\text{o}}$ Cuadrante	$+$	$-$	$-$
3$^{\text{er}}$ Cuadrante	$-$	$-$	$+$
2$^{\text{o}}$ Cuadrante	$-$	$+$	$-$

13. Cálculo de las restantes razones trigonométricas

Como indicábamos anteriormente, la fórmula fundamental de la trigonometría y las fórmulas que se deducen de esta son válidas ángulos cualesquiera.

Se tiene para un ángulo α cualquiera:

- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$.

A partir de una razón trigonométrica y del cuadrante al que pertenece, podemos obtener todas las razones trigonométricas de dicho ángulo, usando las fórmulas anteriores y los signos de las razones trigonométricas del cuadrante.

Estos últimos solo son necesario para determinar el signo de las raíces cuadradas cuando pasamos un cuadrado como una raíz cuadrada a la otra parte de una igualdad.