Resumen de números racionales

1. Introducción a las fracciones. Fracciones equivalentes

Recordemos que para una fracción cuyos elementos son números naturales, el denominador corresponde con el número de partes en las que hemos dividido la unidad, y el numerador corresponde con el número de esas partes que hemos tomado.

Ahora consideramos fracciones de números enteros, o sea, $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Para la fracción anterior, diremos que a es el numerador y b el denominador.

Se dice que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$.

Cualquier número entero a puede verse como la fracción $\frac{a}{1}$.

Se tiene que $\frac{a}{1} = a$, y si $a \neq 0$ entonces $\frac{a}{a} = 1$ y $\frac{0}{a} = 0$.

2. Simplificación de fracciones. Concepto de número racional.

Como sabemos, fracciones diferentes pueden significar lo mismo. De entre todas las fracciones que representan lo mismo, es lógico considerar aquella que sea lo más simple posible, en el sentido de que los números que aparezcan sean lo más pequeños posibles. Simplificar una fracción consiste en encontrar una fracción equivalente lo más simple posible.

Diremos que una fracción es irreducible si no puede simplificarse más.

Una forma de simplificar un fracción es dividir numerador y denominador por un mismo número, y repetir esto hasta obtener una fracción irreducible. Como en cada paso dividimos por un mismo número el numerador y denominador, la fracción obtenida es equivalente a la dada. Esto se puede hacer en un solo paso, dividiendo por el máximo común divisor de numerador y denominador obtenemos directamente una fracción irreducible.

Otra forma de simplificar una fracción consiste en factorizar numerador y denominador y simplificar las potencias resultantes

Un número racional es el conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a una dada. Denotaremos por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales.

A la hora de trabajar con un número racional, seleccionaremos un representante de entre todas las fracciones que lo componen. Este será la fracción irreducible única entre todas las fracciones que componen dicho número racional que resulta de simplificar al máximo cualquiera de las fracciones que componen dicho número racional.

A partir de ahora trabajaremos con números racionales, aunque hablemos de fracciones. Así, siempre que se plantee una cuestión cuyo resultado sea una fracción, simplificaremos al máximo esta para obtener como resultado una fracción irreducible.

Finalmente, las fracciones pueden interpretarse como divisiones, las correspondientes a dividir numerador entre denominador.

3. Reducción de fracciones a común denominador. Comparación de fracciones

Reducir fracciones a común denominador consiste en encontrar fracciones equivalentes a las dadas de forma que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador. Dicho denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores iniciales.

Reducir a común denominador permite ordenar fracciones.

4. Suma y resta de números racionales

La suma y resta de fracciones es muy sencilla cuando los denominadores coinciden. Sumaremos o restaremos los numeradores según se indique, manteniendo el denominador común.

En el caso de que las fracciones no presenten el mismo denominador, deberemos reducirlas a común denominador, operando con las fracciones resultantes.

Siempre deberemos simplificar el resultado.

La suma de números racionales satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los sumandos no altera la suma.

   Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se tiene:
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

2. Propiedad asociativa.

   Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ se tiene:
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos una suma de tres o más números racionales, podemos omitir los paréntesis.

3. Elemento neutro.

   El 0 es el elemento neutro de la suma de números racionales ya que al sumar este con cualquier número racional se obtiene este número racional, esto es, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se cumple que $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$ y $0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

4. Elemento simétrico.

   El opuesto del número racional $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$.

   Al sumar una fracción con su opuesta obtenemos 0.

   Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, existe su simétrico $\frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0\ \ \frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=0$

5. Multiplicación y división de números racionales

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se define el producto o multiplicación de estos como:
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ con $\frac{c}{d} \neq 0$ se define la división de estos como:
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$
Tanto para la multiplicación como para la división de fracciones, siempre deberemos simplificar el resultado.

La multiplicación o producto de números racionales satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los factores no altera el producto.

   Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se tiene:
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

2. Propiedad asociativa.

   Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ se tiene:
$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos un producto de tres o más números racionales, podemos omitir los paréntesis.

3. Elemento neutro.

   El 1 es el elemento neutro del producto de números racionales ya que al multiplicar este con cualquier número racional se obtiene este número racional, esto es, si tenemos el número racional $\frac{a}{b}$ se cumple que $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$ y $1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

4. Elemento simétrico.

   La inverso de un número racional $\frac{a}{b} \neq 0$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

   Entonces se tiene que al multiplicar un número racional por su inverso obtenemos 1.

   Así, si $\frac{a}{b} \neq 0$, existe su elemento simétrico $\frac{b}{a}$ que cumple que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ y $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$

   La división de dos números racionales no es más multiplicar el primero por el inverso del segunda.

   Finalmente, se satisface una propiedad que involucra al producto y la suma:

5. Propiedad distributiva.

   Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ se tiene:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

   Al aplicar esta propiedad de derecha a izquierda, se dice que estamos sacando factor común.

6. Potencias de números racionales

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n > 1$ es un número natural, se define

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}},$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$.

Se cumple que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

7. Operaciones combinadas de números racionales

Para operaciones combinadas de números racionales, en primer lugar realizaremos los paréntesis y corchetes, y en cuanto a la jerarquía de operaciones tendremos:

1. Potencias.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

8. Expresión decimal de un número racional

Como ya hemos indicado, podemos ver la fracción $\frac{a}{b}$ como la división $a : b$, y obteniendo cifras decimales de esta, podemos obtener la expresión decimal de dicha fracción.

En general, dos fracciones equivalentes tienen la misma expresión decimal, luego podemos hablar de la expresión decimal de un número racional. Esta tendrá un número finito de cifras decimales o en algún momento estas empezarán a repetirse periódicamente. En este caso diremos que estamos ante un número decimal periódico, y estos pueden dividirse en:

1. Números decimales periódicos puros, donde el periodo empieza justo al lado de la coma.
2. Números decimales periódicos mixtos, donde el periodo no empieza al lado de la coma.

9. Fracción generatriz de un número decimal

En el vídeo presentamos los procedimientos para determinar la fracción que representa a los números decimales con un número finito de cifras decimales y los números decimales periódicos, ya sean puros o mixtos.

10. Potencias de exponente negativo

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n > 0$ es un número natural, se define:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Como caso particular, si $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$a^{-n} = \left(\frac{a}{1}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}.$$

11. Raíces de números racionales

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y tenemos un número natural $n > 1$, se define $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{c}{d}$ tal que $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{n} = \dfrac{a}{b}$, si tal $\dfrac{c}{d}$ existe.

Siempre que tengamos una raíz de índice par de un número racional positivo, solo consideraremos el resultado positivo, para considerar el negativo, pondremos un menos delante de la raíz.

Las raíces de índice par de números negativos no existen.

En cuanto a las raíces de índice impar, estas no dan problemas, y su resultado es el único valor que satisface la definición de raíz.

Finalmente $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ siempre que existan las raíces del numerador y denominador.

12. Números irracionales. Los números reales

Los números reales son aquellos que admiten una representación decimal. Así, los números reales son los números sin cifras decimales, que son los números enteros, o los números con cifras decimales.

Denotaremos al conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$.

Aquellos números reales que tienen un número infinito de cifras decimales y no son periódicos se llaman números irracionales. Se tiene que los números irracionales son los números reales que no pueden expresarse como una fracción. Ejemplos de número irracionales son las raíces cuadradas de números naturales que no son exactas, π, los opuestos de los anteriores, etcétera.

Se tiene que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Los números reales pueden representarse en la recta real usando la expresión decimal de estos. La representación de todos los números reales cubre toda la recta real.

13. Intervalos en $\mathbb{R}$

Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces los intervalos acotados son:

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$.

Para los intervalos no acotados, consideramos $a \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que:

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$.

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$.

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$.

$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$.

Todos los intervalos anteriores pueden representarse en la recta real, si el intervalo es abierto en un extremo, lo indicaremos con un punto hueco, si es cerrado en un extremo, con un punto rellenado.

14. Potencias de exponente fraccionario

Si a es un número real y $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, se define:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

siempre que la raíz anterior tenga sentido.