Resumen de ecuaciones de primer grado

1. Monomios

Un monomio es una expresión de la forma ax^n donde a es un número, entero, racional, etcétera, y n es un número natural, puede ser 0, 1, 2, 3, 4,...

Para el monomio ax^n, diremos que a es el coeficiente, x es la letra, que es indeterminada, y el exponente n es el grado.

Debemos entender el monomio ax^n como $a \cdot x^n$. Así, en un monomio tenemos el producto de un número por una potencia. Al trabajar con monomios, lo haremos como si la letra fuera un número, y así introduciremos las operaciones de forma que estas sean compatibles con las propiedades que satisfacen las operaciones aritméticas.

Podemos ver a todo número como un monomio. Si tenemos el número a, entonces a puede expresarse claramente como $a \cdot x^0$.

Observa que el exponente del monomio anterior es 0, luego tenemos que los números son monomios de grado 0.

Se dice que varios monomios son semejantes si tienen el mismo grado.

2. Suma y resta de monomios

La suma de dos monomios semejantes ax^n y bx^n es:

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n,$$

o sea, sumamos los coeficientes de estos y mantenemos el mismo grado.

De la misma forma, la resta de dos monomios semejantes ax^n y bx^n es:

$$ax^n - bx^n = (a-b)x^n,$$

o sea, restamos los coeficientes, manteniendo el mismo grado para el resultado.

Dado que la suma de monomios semejantes se reduce a sumar los coeficientes, dejando igual la parte de la x, se tiene que la suma de monomios satisface las mismas propiedades que la suma de números: conmutativa (el orden de los sumandos no altera la suma), asociativa, existencia de elemento neutro de la suma, es el 0, y finalmente, el elemento simétrico de un monomio se tiene que es su opuesto, esto es, el simétrico de ax^n, es $-(ax^n)$ que es $-ax^n$.

3. Multiplicación y división de monomios

Como sabes, para poder sumar o restar monomios y obtener como resultado un monomio, estos deben ser semejantes, esto es, deben tener el mismo grado.

Sin embargo, para la multiplicación o producto y la división de monomios no va a ser necesario que estos tengan el mismo grado.

Se define la multiplicación de dos monomios ax^n y bx^m como:

$$(ax^n) \cdot (bx^m) = (a \cdot b)x^{n+m}.$$

La multiplicación de monomios satisface la propiedad conmutativa, el orden de los factores no altera el producto, asociativa, y existencial del elemento neutro, que es el monomio 1.

En cuanto a la división de monomios, podemos usar la notación con $:$ o la notación de fracción.

Así, si tenemos dos monomios ax^n y $bx^m \neq 0$ se tiene que:

$$(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m} \qquad \frac{ax^n}{bx^m} = (a : b)x^{n-m}$$

4. Potencias de monomios

Dado el monomio ax^n y un número natural $m > 1$, se define:

$$(ax^n)^m = \underbrace{(ax^n) \cdot (ax^n) \cdot \ldots \cdot (ax^n)}_{n \text{ veces}},$$

$(ax^n)^1 = ax^n$ y $(ax^n)^0 = 1$.

Se tiene que $(ax^n)^m = a^m (x^n)^m = a^m x^{n \cdot m}$.

5. Introducción a los polinomios

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde a_n, a_{n-1}, $\ldots$ a_1, a_0 son números que llamaremos coeficientes del polinomio, y n es un número natural que llamaremos grado del polinomio. Se dice que a_0 es el término independiente de dicho polinomio.

Podemos ver a los números como polinomios de grado 0. Llamaremos a estos polinomios constantes o constantes.

6. Suma y resta de polinomios

A la hora de sumar y restar polinomios, operaremos con los monomios semejantes de ambos, obteniendo como resultado el polinomio formado por los monomios resultantes.

En cuanto a las propiedades de la suma de polinomios, tenemos la propiedad conmutativa , la propiedad asociativa, la existencia de elemento neutro, que es el polinomio constante 0. Finalmente, se tiene la existencia de elemento simétrico, el elemento simétrico de un polinomio $p(x)$, es su opuesto $-p(x)$, que consiste en cambiar de signo todos los monomios de $p(x)$.

La existencia de elemento simétrico para la suma de polinomios es la que permite introducir la resta de polinomios: La resta de dos polinomios no es más que la suma del primero con el opuesto del segundo.

7. Multiplicación de un nmero por un polinomio y combinaciones lineales de polinomios

Si tenemos un número a y un polinomio $p(x)$, entonces $a \cdot p(x)$ es el polinomio que resulta de multiplicar a por cada uno de los monomios de $p(x)$.

Una combinación lineal de polinomios no es más que la suma de productos de números por polinomios.

8. Multiplicación de polinomios

La multiplicación o producto de dos polinomios es el polinomio que se obtiene de multiplicar todos los monomios del primer polinomio por todos los del segundo y sumar en el resultado los monomios semejantes obtenidos.

La multiplicación de polinomios satisface la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa, la existencia de elemento neutro, que es 1. También se satisface la propiedad distributiva.

9. Potencias de polinomios

Si $p(x)$ es un polinomio, y $n > 1$ es un número natural

$$p(x)^n = \underbrace{p(x) \cdot p(x) \cdot \ldots \cdot p(x)}_{n \text{ veces}},$$

$p(x)^1 = p(x)$ y $p(x)^0 = 1$.

10. Igualdades notables

Las igualdades notables que presentamos son ciertas para números, monomios, polinomios,...

La primera dice que el cuadrado de una suma es el cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En segundo lugar tenemos que el cuadrado de una resta es el cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Finalmente tenemos que suma por diferencia es diferencia de cuadrados:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

11. División de polinomios

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, con la división de $p(x)$ entre $q(x)$, buscamos dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$, tales que $p(x) = q(x)\cdot c(x)+r(x)$ y que el grado de $r(x)$ sea menor que el grado de $q(x)$. Diremos que $p(x)$ es el dividendo, $q(x)$ es el divisor, $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto.

El primer paso que siempre deberemos realizar cuando vayamos a dividir dos polinomios es ordenar y completar el dividendo y ordenar el divisor.

12. Regla de Ruffini para dividir por polinomios de la forma $x-a$

La regla de Ruffini es un algoritmo para realizar divisiones de polinomios entre polinomios de la forma $x-a$. En el caso de dividir por un polinomio de la forma $x+a$, observemos que $x+a = x-(-a)$.

13. Regla de Ruffini para divisiones cuyo divisor es un polinomio de grado 1

La regla de Ruffini también permite realizar divisiones cuyo divisor es un polinomio de grado 1 cualquiera. Así, si tenemos la división $p(x) : (ax+b)$, dividiremos tanto numerador como denominador por a, obteniendo la división:

$$\frac{p(x)}{a} : \left(x + \frac{b}{a}\right),$$

división que podemos realizar mediante la regla de Ruffini, donde el cociente es el mismo que el de la división inicial, y a partir del resto de esta última se puede obtener el resto de la división inicial.

14. Cálculo de imágenes de polinomios

Si $p(x)$ es un polinomio y a es un número, $p(a)$ es el resultado que se obtiene al sustituir en $p(x)$ la x por a.

15. Cálculo de imágenes de polinomios usando la regla de Ruffini

Si $p(x)$ es un polinomio y a es un número, se tiene que $p(a)$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x-a$. Así, si en la regla de Ruffini incluimos a en la parte inferior izquierda, $p(a)$ sería el último valor que obtendríamos.

16. Raíces de polinomios

Si $p(x)$ es un polinomio y a es un número, se dice que a es una raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$.