# Resumen de números enteros

## 1. Introducción a los números enteros

Los números enteros son los números naturales $0$, $1$, $2$, $3$,... junto con los números negativos $-1$, $-2$, $-3$,.... El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$.

Cuando trabajamos con números enteros, a los positivos podemos también anteponerles un $+$: $+1$, $+2$, $+3$, ... denotaremos al conjunto de estos por $\mathbb{Z}^+$ y al conjunto de los números enteros negativos por $\mathbb{Z}^-$. Así se tiene:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

Los números enteros admiten una representación gráfica. Para ello dibujamos una recta, en la mitad incluimos el $0$, en la parte derecha de $0$ incluimos ordenadamente los números positivos y en la parte izquierda de $0$ los números negativos, siempre de forma que el espacio entre dos números enteros consecutivos sea el mismo.

La representación gráfica de números enteros también nos permite ordenarlos: un número será mayor que otro cuando está más a la derecha.

Finalmente, el valor absoluto de un número entero es aquel que se obtiene al quitarle el signo.

## 2. Suma de números enteros

Para sumar números enteros se utiliza la regla del "tengo y debo": tengo para los positivos, debo para los negativos. El resultado de la suma es el número que representa la situación final.

También podemos realizar sumas de números enteros usando la representación gráfica de estos en una recta. Para ello, consideramos la posición en la recta del primer sumando, en el caso de que el segundo sumando sea positivo, nos desplazamos hacia la derecha tantas posiciones como indica dicho segundo sumando, y si es negativo, hacemos los mismo hacia la izquierda.

## 3. Propiedades de la suma de números enteros

La suma de números enteros satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los sumandos no altera la suma.
   Si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b = b + a$.
2. Propiedad asociativa.
   Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos una suma de tres o más sumandos, podemos omitir los paréntesis.
3. Elemento neutro.
   El $0$ es el elemento neutro de la suma de números enteros ya que al sumar este con cualquier número entero se obtiene este número, esto es, si $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$.
4. Elemento simétrico.
   El opuesto de un número entero $a$, que denotaremos por $-a$, es aquel que se obtiene de cambiar el signo de $a$.

Se tiene que todo número entero tiene elemento simétrico para la suma, que es su opuesto. Así, se tiene que $a + (-a) = 0$ y también $-a + a = 0$.

## 4. Resta de números enteros

La resta de números enteros es la suma del primero con el opuesto del segundo. Para realizar restas de número enteros aplicaremos la regla de los signos y la regla del "tengo y debo".

**Regla de los signos**

$+$ con $+$ es $+$

$+$ con $-$ es $+$

$-$ con $+$ es $-$

$-$ con $-$ es $+$

## 5. Multiplicación de números enteros

El resultado de una multiplicación de dos números enteros tiene por signo el que resulta de aplicar la regla de los signos anterior junto con el resultado de multiplicar los números ignorando los signos.

## 6. Propiedades de la multiplicación de números enteros

La multiplicación o producto de números enteros satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los factores no altera el producto.
   Si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \cdot b = b \cdot a$.
2. Propiedad asociativa.
   Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos un producto de tres o más factores, podemos omitir los paréntesis.
3. Elemento neutro.
   El $1$ es el elemento neutro del producto de números enteros ya que al multiplicar este con cualquier número entero se obtiene este número, esto es, si $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$.

   Finalmente, se satisface una propiedad que involucra al producto y la suma:
4. Propiedad distributiva.
   Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

   Al aplicar esta propiedad de derecha a izquierda, se dice que estamos sacando factor común.

## 7. División de números enteros

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ con la división de $a$ entre $b$, que denotaremos por $a : b$ o $\dfrac{a}{b}$ buscamos un número entero tal que al multiplicarlo por $b$ nos dé $a$.

Tendremos en cuenta las siguientes cuestiones:

1. No se puede dividir por $0$.
2. Para que dicha división puede realizarse, al considerar los números sin signo, el segundo debe dividir al primero, ya que el resultado tiene que estar en $\mathbb{Z}$.

El resultado de la división tiene por signo el resultado de aplicar la regla de los signos junto con el resultado de dividir los números ignorando los signos.

## 8. Operaciones combinadas de números enteros

Si en una expresión con operaciones combinadas aparecen potencias y raíces, estas se realizarán antes que el resto de operaciones aritméticas. Así, en primer lugar realizaremos los paréntesis y corchetes, y en cuanto a la jerarquía de operaciones tendremos:

1. Potencias y raíces.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

## 9. Potencias de números enteros

Al igual que para potencias de números naturales, si $a \in \mathbb{Z}$ y $n > 1$ es un número natural, entonces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

.

Diremos que $a$ es la base y $n$ es el exponente.
Se define $a^1 = a$ y $a^0 = 1$.
Si $a$ es un número entero positivo, se tiene que $(-a)^n$ da como resultado un número negativo si $n$ es impar, y da positivo si $n$ es par.

## 10. Propiedades de las potencias de números enteros

Se cumplen las mismas propiedades que para potencias de números naturales.
Si $a$, $b$ son números enteros y $n$, $m$ son números naturales, siempre que las expresiones dadas tengan sentido, se tiene:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $(a : b)^n = a^n : b^n$

## 11. Raíces de números enteros

Si $a \in \mathbb{Z}$, se define la raíz cuadrada de $a$, que denotamos por $\sqrt{a}$, como un número natural, si existe, tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene $a$. Como hemos indicado para dichas raíces solo consideraremos el resultado positivo, para el resultado negativo tendría que aparecer un signo menos delante de la raíz.

Las raíces cuadradas de números enteros negativos no existen.

En general, si $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ entonces $\sqrt[n]{a}$ es un número $b$, si existe, tal que $b^n = a$. En el caso de calcular la raíz de índice par de un número entero positivo, solo consideraremos el resultado positivo, para el negativo tendría que aparecer un signo menos delante de la raíz. Las raíces de índice par de números negativos o existe. Para las raíces de índice impar no surgen los problemas anteriores, obtenemos el resultado correspondiente.

## 12. Más operaciones combinadas de números enteros

En una operación combinada de números enteros, en primer lugar realizaremos los paréntesis y corchetes, y en cuanto a la jerarquía de operaciones tendremos:

*a*) Potencias y raíces.

*b*) Multiplicaciones y divisiones.

*c*) Sumas y restas.