Logaritmos

1. Cálculo de logaritmos

Consideremos dos números reales $a, b > 0$, $a \neq 1$.

Entonces el logaritmo en base a de b, que denotaremos por $\log_a b$ es el número al que tenemos que elevar a para obtener b.

Entonces se tiene que $\log_a b = x \mid a^x = b$, luego en ocasiones, para calcular un logaritmo resolveremos la ecuación exponencial anterior.

Además, se tiene que el logaritmo es la operación inversa de las potencias.

Finalmente se tiene que si tenemos un número real $a > 0$, $a \neq 1$ entonces $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

2. Logaritmos en base 10 y logaritmos neperianos

Un logaritmo decimal es un logaritmo donde la base es 10. Los logaritmos decimales se denotan por $\log$, luego si tenemos un número real $b > 0$, entonces $\log b = \log_{10} b$.

El logaritmo neperiano, es el logaritmo en base el número e. Los logaritmos neperianos se denotan por $\ln$, luego si tenemos un número real $b > 0$, entonces $\ln b = \log_{\mathrm{e}} b$.

3. Propiedades de los logaritmos

Si tenemos dos números reales $a, b > 0$, se cumple:

1. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, si $b \neq 0$.
3. $\ln a^n = n \cdot \ln a$, $n \in \mathbb{R}$.

Estas propiedades también son validas si sustituimos el logaritmo neperiano por un logaritmo en cualquier base.

4. Fórmula de cambio de base

La fórmula de cambio de base para logaritmos permite calcular logaritmos que no son ni decimales ni neperianos usando la calculadora. Si tenemos dos números reales $a, b > 0$, $a \neq 1$, entonces se obtiene la fórmula de cambio de base:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

La fórmula de cambio de base es válida también poniendo en la parte derecha logaritmos decimales o logaritmos de cualquier base.

5. Representación gráfica de las funciones logarítmicas y sus propiedades

Calcular un logaritmo es lo inverso de calcular una potencia. De ello se sigue que las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales. Así, a la hora de obtener una tabla de valores para la función $f(x) = \log_a x a \neq 1$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, consideraremos para x potencias de a.

Consideraremos dos casos: $a > 1$ y $0 < a < 1$, ya que para cada uno de estos casos, las funciones correspondientes tienen gráficas con la misma forma y propiedades comunes.

Las propiedades que satisface la función $f(x) = \log_a x$, si $a > 1$, son:

1. $\mathrm{Dom}\, f =]0, +\infty[$
2. f es estrictamente creciente.
3. El punto de corte con el eje x es $(1, 0)$ y no corta al eje y.
4. El eje y es una asíntota vertical de f.
5. $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Las propiedades que satisface la función $f(x) = \log_a x$, si $0 < a < 1$, son:

1. $\mathrm{Dom}\, f =]0, +\infty[$
2. f es estrictamente decreciente.
3. El punto de corte con el eje x es $(1, 0)$ y no corta al eje y.
4. El eje y es una asíntota vertical de f.
5. $\lim_{x\to\, 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\, +\infty} f(x) = -\infty$.

6. La función $f(x) = \ln x$

Si consideramos la función $f(x) = \ln x$, dado que la base de este logaritmo es $\mathrm{e} = 2{,}718 > 0$, ya conocemos la forma que va a tener la gráfica de f y cuáles van a ser sus propiedades:

1. $\mathrm{Dom}\, f =]0, +\infty[$
2. f es estrictamente creciente.
3. El punto de corte con el eje x es $(1, 0)$ y no corta al eje y.
4. El eje y es una asíntota vertical de f.
5. $\lim_{x\to\, 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\, +\infty} f(x) = +\infty$.

7. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es una ecuación donde las incógnitas vienen afectadas por logaritmos.

Para resolver las ecuaciones logarítmicas que presentaremos, aplicaremos propiedades de los logaritmos con el objetivo de lograr una igualdad de logaritmos de la misma base. Entonces, igualaremos lo de dentro y resolveremos la ecuación resultante.

Una vez tengamos las soluciones de esta última ecuación, tendremos que comprobar que lo son de la ecuación logarítmica inicial. Para ello, bastará con ver si para cada uno de los valores de las soluciones obtenidas podemos calcular los logaritmos de la ecuación inicial.

8. Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Un sistema de ecuaciones logarítmicas es un sistema en cuyas ecuaciones aparecen incógnitas afectadas por logaritmos.