Resumen de Fracciones

1. Introducción a las fracciones. Fracciones equivalentes

Las fracciones surgen cuando queremos trabajar con partes de la unidad.

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Diremos que a es el numerador de la fracción y b es el denominador de la fracción.

El denominador corresponde con el número de partes en las que hemos dividido la unidad, y el numerador corresponde con el número de esas partes que hemos tomado.

Distintas fracciones pueden significar la misma cantidad. Dos fracciones que representan la misma cantidad se denominan fracciones equivalentes.

Se tiene que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$.

Cualquier número natural a puede verse como la fracción $\frac{a}{1}$.

Se tiene que $\frac{a}{1} = a$, y si $a \neq 0$ entonces $\frac{a}{a} = 1$ y $\frac{0}{a} = 0$.

Finalmente, leeremos la fracción $\frac{a}{b}$ como a partido de b. También se tiene:

1. Para las fracciones con denominador 2, leemos el numerador y añadimos medio o medios.
2. Para las fracciones con denominador 3, leemos el numerador y añadimos tercio o tercios.
3. Para las fracciones con denominador de 4 a 10, leemos el numerador y añadimos el ordinal del denominador.
4. Para las fracciones con denominador a partir de 11, leemos el numerador y añadimos el denominador terminado en -avo o -avos.

2. Simplificación de fracciones. Concepto de número racional

Como hemos visto, fracciones diferentes pueden significar lo mismo. De entre todas las fracciones que representan lo mismo, es lógico considerar aquella que sea lo más simple posible, en el sentido de que los números que aparezcan sean lo más pequeños posibles. Simplificar una fracción consiste en encontrar una fracción equivalente lo más simple posible.

Diremos que una fracción es irreducible si no puede simplificarse más.

Una forma de simplificar un fracción es dividir numerador y denominador por un mismo número, y repetir esto hasta obtener una fracción irreducible. Como en cada paso dividimos por un mismo número el numerador y denominador, la fracción obtenida es equivalente a la dada. Esto se puede hacer en un solo paso, dividiendo por el máximo común divisor de numerador y denominador obtenemos directamente una fracción irreducible.

Otra forma de simplificar una fracción consiste en factorizar numerador y denominador y simplificar las potencias resultantes

Un número racional es el conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a una dada.

A la hora de trabajar con un número racional, seleccionaremos un representante de entre todas las fracciones que lo componen. Este será la fracción irreducible única entre todas las fracciones que componen dicho número racional que resulta de simplificar al máximo cualquiera de las fracciones que componen dicho número racional.

A partir de ahora trabajaremos con números racionales, aunque hablemos de fracciones. Así, siempre que se plantee una cuestión cuyo resultado sea una fracción, simplificaremos al máximo esta para obtener como resultado una fracción irreducible.

Finalmente, las fracciones pueden interpretarse como divisiones, las correspondientes a dividir numerador entre denominador.

3. Reducción de fracciones a común denominador. Comparación de fracciones

Reducir fracciones a común denominador consiste en encontrar fracciones equivalentes a las dadas de forma que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador. Dicho denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores iniciales.

Reducir a común denominador permite ordenar fracciones.

4. Suma y resta de fracciones

La suma y resta de fracciones es muy sencilla cuando los denominadores coinciden. Sumaremos o restaremos los numeradores según se indique, manteniendo el denominador común.

En el caso de que las fracciones no presenten el mismo denominador, deberemos reducirlas a común denominador, operando con las fracciones resultantes.

Siempre deberemos simplificar el resultado.

La suma de fracciones satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los sumandos no altera la suma.

   Para las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se tiene:
   $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

2. Propiedad asociativa.

   Para las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se tiene:
   $$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos una suma de tres o más fracciones, podemos omitir los paréntesis.

3. Elemento neutro.

   El 0 es el elemento neutro de la suma de fracciones ya que al sumar este con cualquier fracción se obtiene esta fracción, esto es, si tenemos la fracción $\frac{a}{b}$ se cumple que $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$ y $0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

5. Multiplicación y división de fracciones

Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se define el producto o multiplicación de estas como:
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ con $\frac{c}{d}\neq 0$ se define la división de estas como:
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Tanto para la multiplicación como para la división de fracciones, siempre deberemos simplificar el resultado.

La multiplicación o producto de fracciones satisface las siguientes propiedades:

1. Propiedad conmutativa. El orden de los factores no altera el producto.

   Para las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se tiene:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

2. Propiedad asociativa.

   Para las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se tiene:
$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

   Como consecuencia de la propiedad asociativa, si tenemos un producto de tres o más fracciones, podemos omitir los paréntesis.

3. Elemento neutro.

   El 1 es el elemento neutro del producto de fracciones ya que al multiplicar este con cualquier fracción se obtiene esta fracción, esto es, si tenemos una fracción $\frac{a}{b}$ se cumple que $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ y $1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

4. Elemento simétrico.

   La fracción inversa de una fracción $\frac{a}{b} \neq 0$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

   Entonces se tiene que al multiplicar una fracción por su inversa obtenemos 1.

   Así, si $\frac{a}{b} \neq 0$, existe su elemento simétrico $\frac{b}{a}$ que cumple que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ y $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$

   La división de dos fracciones no es más multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

   Finalmente, se satisface una propiedad que involucra al producto y la suma:

5. Propiedad distributiva.

   Para las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se tiene:
$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

   Al aplicar esta propiedad de derecha a izquierda, se dice que estamos sacando factor común.

6. Operaciones combinadas de fracciones

Cuando tenemos operaciones combinadas de fracciones, primero se realizan los paréntesis y corchetes.

Se establece la prioridad conocida para las operaciones combinadas:

1. Multiplicaciones y divisiones.
2. Sumas y restas.