Factorización de polinomios

1. Divisibilidad de polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, diremos que $q(x)$ divide a $p(x)$ si existe un polinomio $c(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot c(x)$. Entonces escribiremos $q(x) \mid p(x)$ y si $q(x)$ no divide a $p(x)$ escribiremos $q(x) \nmid p(x)$.

Se tiene que $q(x) \mid p(x)$ es equivalente a que la división $p(x) : q(x)$ es exacta.

2. Introducción a la factorización de polinomios

Si $p(x)$ es un polinomio de grado mayor que 1, una factorización de $p(x)$ es una expresión de este como producto de polinomios de grado mayor que 1, esto es:

$$p(x) = r(x) \cdot s(x)$$

donde los grados de $r(x)$ y $s(x)$ son mayores o iguales que 1.

Si suponemos ahora que $q(x) \mid p(x)$ siendo $1 \leq \text{grado}(q(x)) < \text{grado } (p(x))$, entonces existe un polinomio $c(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot c(x)$, donde $q(x)$ y $c(x)$ no son polinomios constantes. Así, en ese caso obtenemos una factorización de $p(x)$.

3. Raíces de polinomios, divisibilidad y factorización

Supongamos que a es una raíz de un polinomio, recuerda que esto significa que $p(a) = 0$.

Como sabes, para calcular $p(a)$, además de poder hacerlo sustituyendo en $p(x)$ la x por a, podemos usar la regla de Ruffini.

Así, como este mismo proceso permite realizar la división $p(x) : (x - a)$ y en nuestro caso $p(a) = 0$, obtenemos que el resto de la división es 0, luego la división es exacta, y entonces si $c(x)$ es el cociente de la división:

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x).$$

Así, si a es una raíz de un polinomio, podemos obtener una factorización de $p(x)$ donde $x - a$ es uno de los factores.

4. Factorización de polinomios de grado 2

La factorización de un polinomio $p(x)$ de grado 2 puede obtenerse a partir de sus raíces:

Si a y b son sus raíces entonces:

$$p(x) = m(x - a)(x - b),$$

donde m es el coeficiente de x^2 en $p(x)$.

Si un polinomio de grado 2 no tiene raíces, entonces ese polinomio no puede factorizarse.

5. Polinomios irreducibles

Un polinomio no constante es irreducible si no admite factorizaciones, esto es, no puede expresarse como producto de polinomios de grado mayor o igual que 1.

Los polinomios irreducibles son:

1. Los polinomios de grado 1.
2. Los polinomios de grado 2 sin raíces reales.

6. Factorización de polinomios usando igualdades notables

Las igualdades notables vistas al revés permiten factorizar algunos polinomios.

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

7. Ejemplos de factorización de polinomios

A partir de ahora, factorizar un polinomio consistirá en expresar dicho polinomio como producto de polinomios irreducibles. Para ello, resulta fundamental el cálculo de las raíces de dicho polinomio, ya que si a es una raíz de un polinomio $p(x)$, entonces se tiene que $x - a$ divide a $p(x)$, de donde obtenemos una expresión de $p(x)$ como producto de $x - a$ y otro polinomio.

A la hora de determinar raíces de un polinomio, se tiene que las posibles raíces de un polinomio son los divisores enteros del término independiente.

8. Más ejemplos de factorización de polinomios

Presentamos ejemplos de factorización de polinomios donde usamos lo que hemos aprendido anteriormente.

9. Resolución de ecuaciones factorizando

Una forma de resolver una ecuación polinómica $p(x) = 0$ es factorizando el polinomio $p(x)$.

10. mcd y mcm de polinomios

Consideremos un conjunto de polinomios no constantes.

1. El máximo común divisor (mcd) de estos polinomios es un polinomio de grado el mayor posible, de forma que este divide a todos los polinomios del conjunto.
2. El mínimo común múltiplo (mcm) es un polinomio del menor grado posible de forma que todos los polinomios del conjunto lo dividen.

Normalmente para el mcd y mcm escogeremos polinomios mónicos, que son polinomios cuyo coeficiente de la x de mayor grado es 1.

Para el cálculo del mcd y mcm:

1. Factorizaremos todos los polinomios.
2. *a*) El mcd es el producto de los factores irreducibles comunes elevados al menor exponente.
   b) El mcm es el producto de los factores irreducibles comunes y no comunes elevados al mayor exponente.