**Función exponencial**

## 1. Repaso de potencias y sus propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n > 1$ es un número natural, entonces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

.

Se define $a^1 = a$ y $a^0 = 1$.

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ no nulo y $n > 0$ es un número natural, se define: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, y en general, si $a \in \mathbb{R}$ no nulo, se define $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$.

Si $a$ es un número real y $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ se define $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Finalmente, para calcular $a^r$ siento $r$ un número irracional, podremos obtener aproximaciones de esta potencia realizando una aproximación del exponente por un número racional $r \approx \dfrac{n}{m}$ y entonces obteniendo la aproximación $a^r = a^{\frac{n}{m}}$.

En cuanto a las propiedades de las potencias, si $a$, $b$, $n$ y $m$ son números reales, siempre que las expresiones dadas tengan sentido, se tiene:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $(a : b)^n = a^n : b^n$

## 2. Representación gráfica de la función exponencial

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$, $a \neq 1$

Por la forma de la representación gráfica de estas funciones y por las propiedades que satisfacen, podemos dividir estas en dos tipos: Si $a > 1$ y si $0 < a < 1$.

En el caso de que $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ satisface las propiedades:

1. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$
2. $f$ es estrictamente creciente.
3. El punto de corte con el eje $y$ es $(0, 1)$ y no corta al eje $x$.
4. El eje $x$ es una asíntota horizontal de $f$.
5. $\lim_{x \to -\infty} = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$.

En el caso de que $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x$ satisface las propiedades:

1. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$
2. $f$ es estrictamente decreciente.
3. El punto de corte con el eje $y$ es $(0, 1)$ y no corta al eje $x$.
4. El eje $x$ es una asíntota horizontal de $f$.
5. $\lim_{x \to -\infty} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} = 0$.

## 3. La función $f(x) = \mathrm{e}^x$

Se define el número $\mathrm{e}$ como:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

El número $\mathrm{e}$ es un número irracional (no puede expresarse como una fracción) cuyo valor aproximado es $\mathrm{e} \approx 2{,}718 > 1$.

Así, las propiedades que satisface la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ son:

1. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

2. $f$ es estrictamente creciente.
3. El punto de corte con el eje $y$ es $(0,1)$ y no corta al eje $x$.
4. El eje $x$ es una asíntota horizontal de $f$.
5. $\lim_{x\to\,-\infty} = 0$ y $\lim_{x\to\,+\infty} = +\infty$.

## 4. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una ecuación donde aparecen incógnitas en los exponentes. Resolver una ecuación exponencial consiste en encontrar el valor o valores de las incógnitas de forma que se satisface la igualdad.

Aprenderemos a resolver dos tipos de ecuaciones exponenciales:

1. Ecuaciones exponenciales que pueden reducirse a una igualdad de potencias de la misma base. Para resolver estas, factorizaremos y aplicaremos propiedades de potencias para obtener la igualdad de potencias de la misma base, y entonces, igualaremos los exponentes.
2. Ecuaciones exponenciales donde aparecen sumas o restas de potencias. Para resolver estas, factorizaremos y aplicaremos propiedades de potencias, con el objetivo de lograr que solo aparezca una potencia en toda la igualdad. Entonces realizaremos el cambio de variable donde $z$ será la potencia común, obteniendo una ecuación polinómica. Al final, tendremos que deshacer el cambio de variable para obtener las soluciones de la ecuación exponencial.

## 5. Sistemas de ecuaciones exponenciales

Un sistema de ecuaciones es un sistema en cuyas ecuaciones aparecen incógnitas en exponentes. Para resolver estos, podremos aplicar propiedades de potencias para reducir el sistema de ecuaciones exponenciales a un sistema de ecuaciones lineales, usando cambios de variable, o bien, si una de las ecuaciones es lineal, despejando una de las incógnitas en función de la otra, y sustituyendo el valor de esta en la otra ecuación para obtener una ecuación con una única incógnita.