



Resumen de Divisibilidad

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE DIVISIBILIDAD

Si $a, b \in \mathbb{N}$ son distintos de 0, se dice que a divide a b si la división $b : a$ es exacta. En ese caso escribiremos $a \mid b$ y en otro caso diremos que a no divide a b y escribiremos $a \nmid b$.

Se tiene también que $a \mid b$ si existe un número natural c tal que $b = a \cdot c$.

Introducimos dos nuevos términos que no son más que denominar de forma diferente que $a \mid b$. En ese caso, también diremos que b es múltiplo de a o que b es divisible por a .

Se satisfacen dos propiedades muy sencillas. Si a es un número natural distinto de 0 entonces se tiene siempre que $1 \mid a$ y $a \mid a$.

2. DIVISORES DE UN NÚMERO. NÚMEROS PRIMOS

Si $a, b \in \mathbb{N}$ y son distintos de 0, se dice que a es divisor de b si $a \mid b$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a es un número primo si solo cuenta con dos divisores, 1 y el mismo.

3. OBTENCIÓN DE NÚMEROS PRIMOS MEDIANTE LA CRIBA DE ERASTÓTENES

Presentamos un procedimiento, la criba de Eratóstenes, que permite obtener un listado ordenado de los números primos. Partimos de un listado con los números desde 2 hasta donde deseemos. El 2 es un número primo y entonces tachamos todos los números divisibles por 2. Entonces, al volver al principio de la lista, el primer valor no considerado sin tachar sería primo, en este caso el 3 y tacharíamos entonces todos los números divisibles por 3, volviendo al inicio tendríamos un nuevo número primo, el 5, y seguiríamos con el procedimiento, obteniendo en cada paso un nuevo número primo.

4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Presentamos algunos criterios de divisibilidad para distintos números primos.

Un número es divisible por 2 cuando es par, o sea, cuando su última cifra es 0 o par.

Un número es divisible por 3 si al sumar sus cifras, el resultado es divisible por 3, y este proceso puede repetirse con la suma de las cifras de los resultados obtenidos tantas veces como quieras.

Un número es divisible por 5 cuando su última cifra es 0 o 5.

Los criterios de divisibilidad para el 7 no reducen mucho el trabajo de dividir el número entre 7.

Para ver si un número es divisible por 11:

1. Empezando por la unidades, sumamos las cifras que ocupan una posición impar.
2. Sumamos las cifras que ocupan una posición par.
3. Restamos las dos cantidades anteriores, en el orden en el que podamos hacerlo.

Para que el número inicial sea divisible por 11, el resultado obtenido en el proceso debe ser 0 o múltiplo de 11.

5. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Presentamos un procedimiento para la factorización de cualquier número natural no nulo n . Así, escribiremos nuestro número y una línea vertical. En la parte derecha pondremos el menor primo que lo divide, incluyendo el resultado de la división en la parte izquierda, y repetiremos este proceso hasta obtener 1 como cociente.

De esta forma, obtenemos una expresión de nuestro número como producto de potencias de números primos. El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que dicha descomposición existe y es única salvo el orden de los factores.

6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El máximo común divisor de un conjunto de números, denotado por las iniciales mcd , es el mayor divisor común de todos ellos, esto es, entre todos los divisores comunes de dichos números, el mayor de estos.

El mínimo común múltiplo de un conjunto de números, denotado por mcm , es el menor múltiplo común de todos ellos, esto es, entre todos los múltiplos comunes, el menor de estos.

Para calcular el mcd y el mcm de un conjunto de números, podemos describir el conjunto de los divisores y el conjunto de múltiplos de dichos números, el mcd será el mayor elemento común de los conjuntos de divisores, el mcm será el menor elemento común de los conjuntos de múltiplos.

7. CÁLCULO DEL MCD Y MCM

Presentamos el procedimiento que utilizaremos habitualmente para calcular el mcd y el mcm de un conjunto de números.

En ambos casos, en primer lugar obtendremos la descomposición en factores primos de los números que intervienen.

1. El máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes a todos ellos, cada uno de estos elevados al menor exponente que presentan en las factorizaciones (factores comunes elevados al menor exponente).
2. El mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores primos que aparecen en sus factorizaciones, cada uno de ellos elevados al mayor exponente que presentan en tales factorizaciones (factores comunes y no comunes elevados al menor exponente).